№5-дәріс.

**Тақырыбы: Тригонометриялық өрнектерді интегралдау әдістері.
Дербес жағдайлар.**

Бұл бөлімде біз

$$\int R(\sin x, \cos x)dx ,$$

түріндегі интегралды табу әдістерін қарастырамыз, мұндағы $R(u,v)$- u,v - ға қатысты рационал функция.

Мұндай түрдегі интегралдар айнымалыны универсал ауыстыру көмегімен

$$tg\frac{x}{2} = t ,$$

рационал функцияларды интегралдауға әкелеміз. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \left| \text{бөлшектің алымы мен бөлімін } \cos^2\frac{x}{2} \text{-қа бөлеміз} \right| =$$

$$= \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} .$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

$x = 2arctgt$ болғандықтан, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Нәтижесінде:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

мұндағы $R_1(t)$ - рационал функция.

Мысал 1.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \left|tg\frac{x}{2} = t\right| = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C .$$

Көрсетілген әдіс интеграл астындағы өрнек $\sin x$ және $\cos x$ айнымалыларын ұстайтын кез келген функция үшін қолданылмайды, себебі кей жағдайларда бұл белгілеу өте үлкен өрнектерге әкеп соғуы мүмкін. Онда біз мынадай белгілеуді қолданамыз.

1^0. Егер интеграл астындағы функция косинус бойынша тақ болса, яғни, $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ болса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x)\cdot\cos x ,$$

одан кейін интегралда $\sin x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(\sin x)\cos xdx = |\sin x = t| = \int R_1(t)dt .$$

Мысал 2.

$$\int cos^3 xdx = \int cos^2 x \cdot coxdx = \int (1 - sin^2 x) cos\ xdx = \int (1 - sin^2 x) d\ sin\ x =$$

$$= \left|\sin x = t\right| = \int (1 - t^2) dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C .$$

2^0. Егер интеграл астындағы функция синус бойынша тақ болса, яғни, $R(-sin\ x, cos\ t) \equiv -R(sin\ x, cos\ x)$ болса,

онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(sin\ x, cos\ x) = R_1(cos\ x) sin\ x ,$$

одан кейін интегралда $cos\ x = t$ жаңа айнымалысын енгізсек, ол $R_1(t)$ рационал функцияға тәуелді интегралға әкеледі:

$$\int R_1(cos\ x) sin\ xdx = \left|cos\ x = t\right| = -\int R_1(t) dt .$$

3^0. Егер интеграл астындағы функция

$$R(-sin\ x, -cos\ x) \equiv R(sin\ x, cos\ x)$$

теңдігін қанағаттандырса, онда оны мынадай түрлендіруге әкелеміз:

$$R(sin\ x, cos\ x) = R_1(tgx),$$

одан кейін интегралда айнымалыны ауыстырсақ:

$$tgx = t,\ x = arctgt\ ,\ dx = \frac{dt}{1 + t^2},$$

Онда рационал функцияның интегралына әкеледі.

Мысал 3.

$$\int \frac{sin^3 x}{cos^3 x} dx = \int tg^3 xdx = \left| tgx = t, dx = \frac{1}{1 + t^2} dt \right| = \int \frac{t^3}{1 + t^2} dt = \int \frac{t^2 t}{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt^2 = \left|t^2 = z\right| = \frac{1}{2} \int \frac{(z + 1) - 1}{z + 1} dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \frac{dz}{z + 1} \right) = \frac{1}{2}(z - ln\left|z + 1\right|) + C =$$

$$= \left|z = t^2 = tg^2 x\right| = \frac{1}{2}(tg^2 x - ln(tg^2 x + 1)) + C .$$

4^0. Мына түрдегі интегралдар:

$\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$, мұндағы m, n – тұрақты сандар, берілсе, онда интеграл астындағы функция мына формулалардың көмегімен синус пен косинустардың қосындысына келеді:

$$sin\ \alpha\ cos\ \beta = \frac{1}{2}(sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)),$$

$$cos\ \alpha\ cos\ \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)),$$

$$sin\ \alpha\ sin\ \beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)).$$

Мысал 4.

$$\int sin\ 3x\ sin\ 5xdx = \frac{1}{2}\int (cos\ 2x - cos\ 8x) dx = \frac{1}{2}\int cos\ 2xdx - \frac{1}{2}\int cos\ 8xdx =$$

$$= \frac{1}{4} sin\ 2x - \frac{1}{16} sin\ 8x + C$$

5^0. $\int \sin^m x \cos^n xdx$ түріндегі интеграл, мұндағы m және n – кез келген бүтін көрсеткіштер.

1). Егер тым болмағанда m немесе n көрсеткіштерінің біреуі тақ бүтін оң сан болса, мысалы $n = 2k + 1$, онда $sin\ x = t$ деп белгілейміз:

$$\int sin^m x \bullet cos^n xdx = \int sin^m x\, cos^{2k} x\, cos\, xdx = \int sin^m x(1 - sin^2 x)^k d\, sin\, x = \int t^m (1 - t^2)^k dt\ .$$

Мысал 5.

$$\int sin^2 x\, cos^3 xdx = \int sin^2 x(1 - sin^2 x)d\, sin\, x = \int t^2 (1 - t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{3} sin^3 x - \frac{1}{5} sin^5 x + C\ .$$

2) Егер m және n көрсеткіштерінің екеуі де жұп, оң, бүтін сан болса, онда мына формулаларды қолданған жөн:

$$sin^2 x = \frac{1 - cos\ 2x}{2}, cos^2 x = \frac{1 + cos\ 2x}{2}\ .$$

Мысал 6.

$$\int sin^2 x \cdot cos^2 xdx = \int \frac{(1 - cos\ 2x)(1 + cos\ 2x)}{4} dx = \int \frac{(1 - cos^2 2x)}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + cos\ 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos\ 4x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} sin\ 4x \right) + C\ .$$